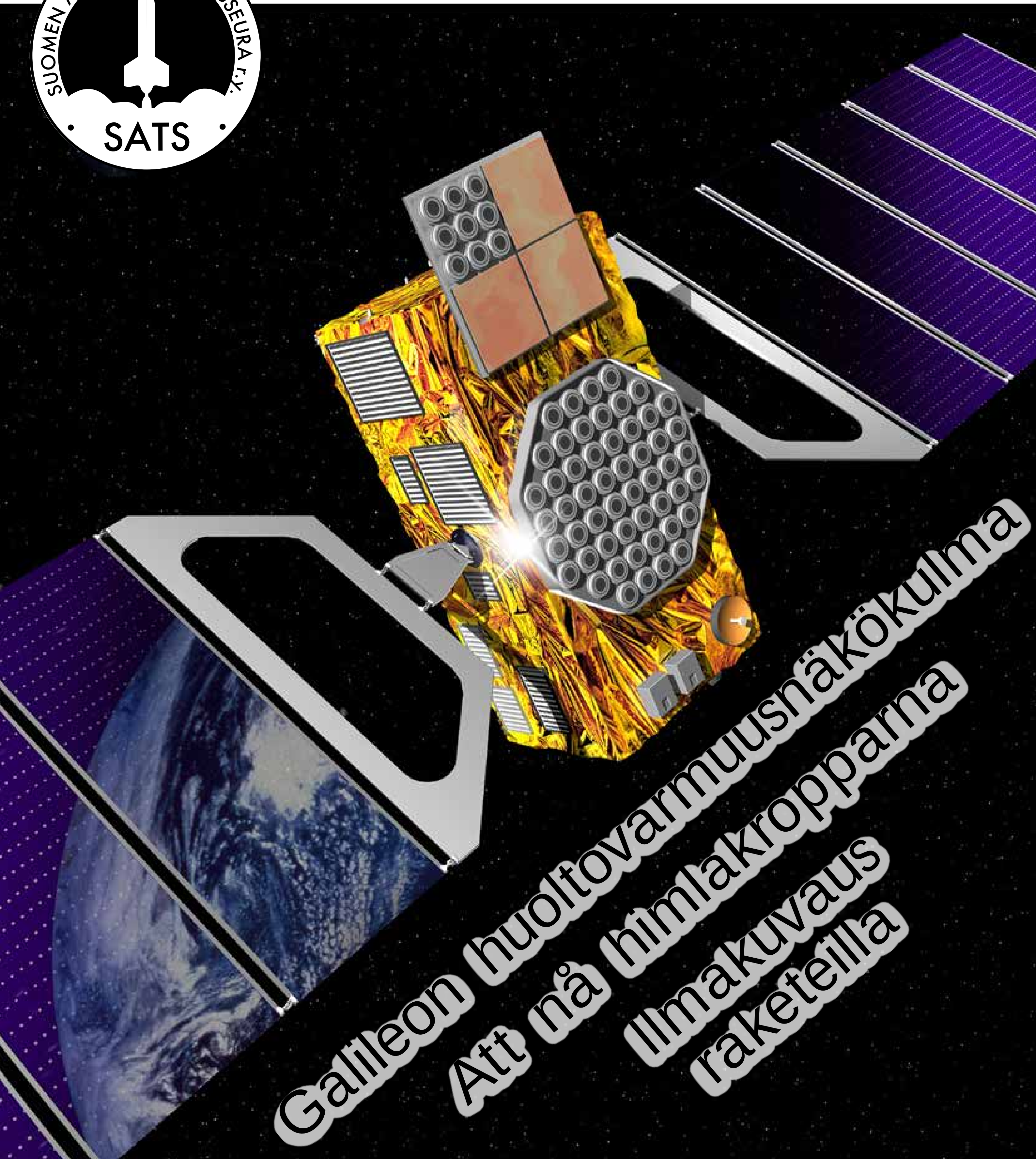
AVARUUSLUOTAIN

Rymdsonden Spaceprobe
4/2012, vol. 47

SUOMEN AVARUUSTUTKIMUSSEURA r.y.
SATS



Galileon huoltovarmuusnäkökulma

Att nå himlakropparna

Ilmakuvaus raketeilla

Rakettitieteen jalanjäljillä

Osa 4: Neliulotteisia kompleksilukuja ja raketin pyörityksiä

Sampo Niskanen

OpenRocket-ohjelmistoa kirjoittaessani tiesin heti aluksi, että laskennalliselta puolelta olisi kaksi haastetta: aerodynaamisten voimien mallintaminen, sekä raketin lentoradan laskenta näistä. Artikkelisarjan aiemmissa osissa olen keskittynyt aerodynaamisiin voimiin, joten nyt on vuorossa lentorata.

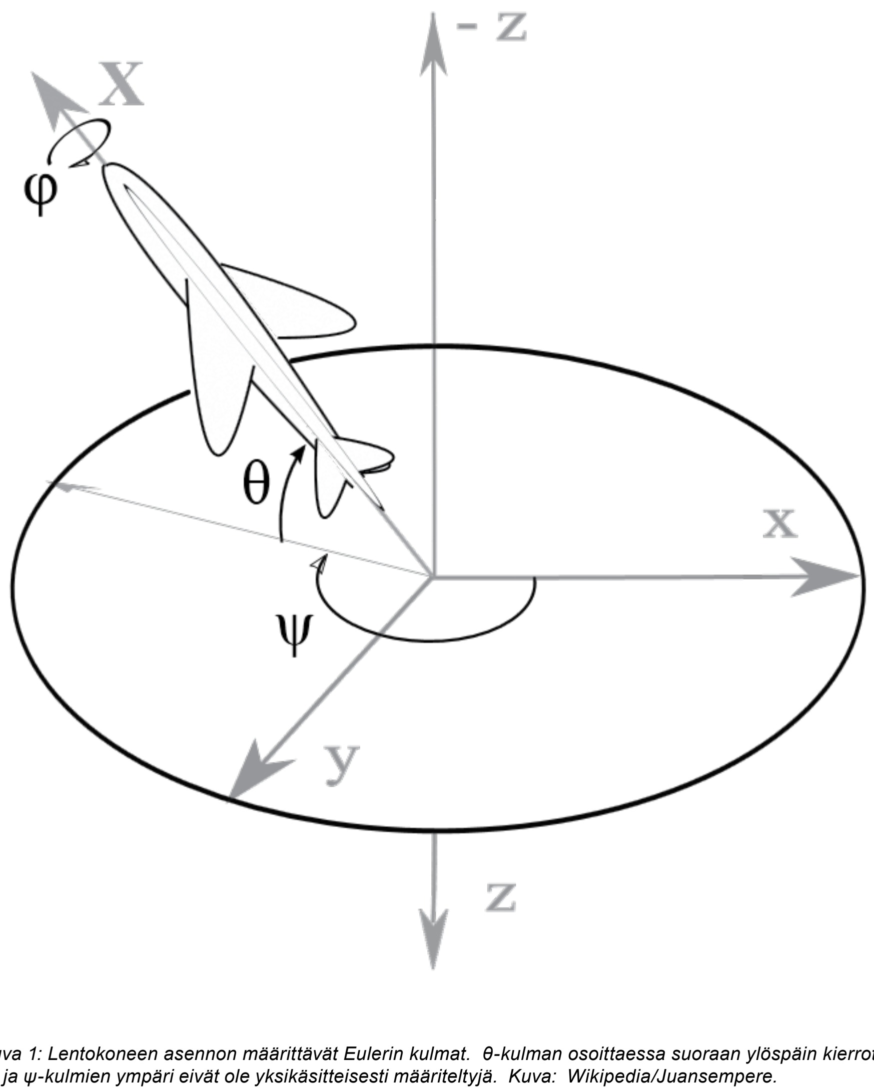
Tähän asti kyse on ollut fysikaalisten ilmiöiden mallintamisesta: miten siivekkeet vaikuttavat, millainen ilmanvastus rungosta tai kärkikartiosta muodostuu, millaisia voimia moottori ja painovoima aiheuttavat. Tästä eteenpäin kyse on kuitenkin raa'asta matematiikasta ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta. Vaikka kaavat voivat näyttää monimutkaisilta, pyrin kuitenkin esittämään asiat sillä tavalla, että lukion pitkä§llä matematiikalla ne pystyy ymmärtämään.

Montako vapausastetta?

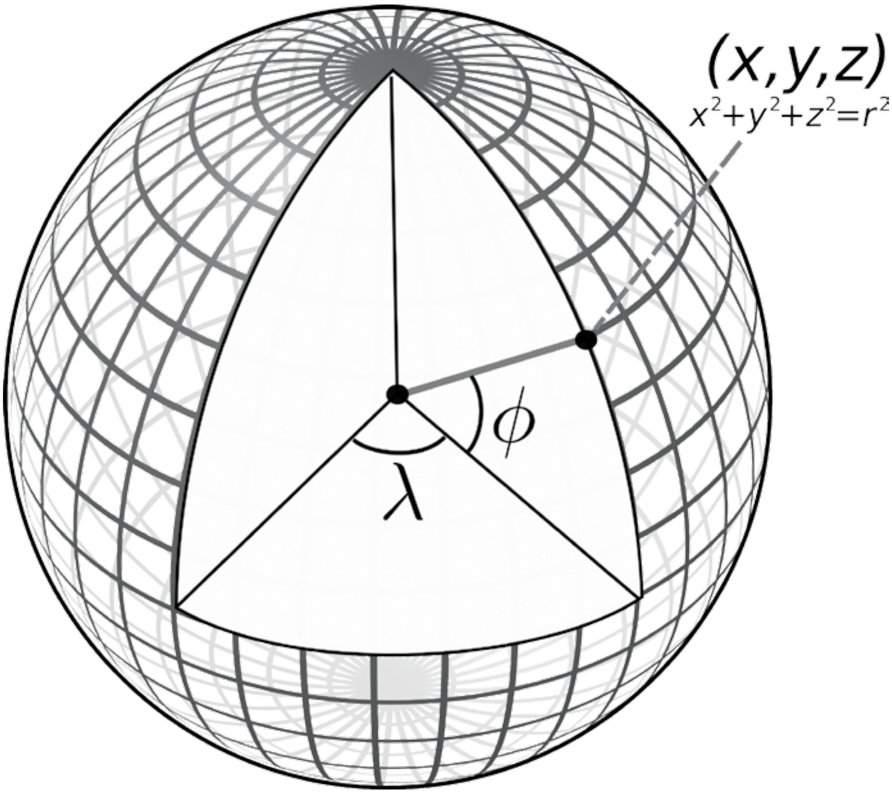
Useimmissa pienoisraketeissa siivekkeet on sijoitettu symmetrisesti ja suoraan, jolloin tuulen suuntaan kohtisuorassa olevia voimia ja momentteja ei synny eikä raketti pyöri lentäessään. Jos raketti laukaistaan suoraan ylöspäin tai kallistaen tuulen suunnassa, raketin pitäisi säilyä koko lentonsa ajan tuulen suunnan määrittämässä tasossa. Pienoisrakettisimulaatiot rajoitetaankin usein kolmeen vapausasteeseen, jossa raketin orientaation määrittävät sen korkeus, sijainti suhteessa tuulen suuntaan sekä kallistuskulma näiden tasossa.

Halusin kuitenkin ohjelmasta enemmän irti. Täysi kuuden vapausasteen simulaatio — jossa raketti voi olla missä sijainnissa ja asennossa hyvänsä — sallisi muun muassa raketin pyörimisen simuloimisen sekä sivutuuleen laukaisemisen. Myöhemmin tämä on osoittautunut arvokkaaksi valinnaksi. Richard Graham on lisännyt simulaatioon muun muassa koriolisvoiman vaikutuksen laskemisen, ja Iso-Haisun viime lennon aikana myös nähtiin kuinka tuulen suunta saattoi kääntyä 90 astetta parin sadan metrin matkalla. Tällaisten mallintaminen olisi mahdotonta rajoittuneemmalla simulaatiolla.

Raketin hetkellinen sijainti on helppo ilmoittaa karteesisissa koordinaateissa. Joskus tulevaisuudessa OpenRocketiin voi vielä lisätä pallokoordinaatistossa simuloinnin, jos haluaa alkaa simuloida kiertoratalentoja. Nykyinen simulaatio koriolisvoimat huomioiden riittää tarkkuuden puolesta satojen kilometrienkin lentoon. Sen sijaan raketin asennon ilmaiseminen on huomattavasti mutkikkaampaa.



Kuva 1: Lentokoneen asennon määrittävät Eulerin kulmat. θ-kulman osoittaessa suoraan ylöspäin kierrot φ- ja ψ-kulmien ympäri eivät ole yksikäsitteisesti määriteltyjä. Kuva: Wikipedia/Juansempere.



Kuva 2: Pallopinnalla (λ,ϕ)-koordinaattijärjestelmä tuottaa singulaaripisteen pallon navoissa. Vaihtoehtoisesti piste voidaan määrittää (x,y,z)-koordinaateilla sekä rajoitusehdolla. Kuva: Wikipedia/Peter Mercator, Sampo Niskanen

Perinteisesti kappaleen asento ilmoitetaan kolmella asentokulmalla, ns. Eulerin kulmilla. Raketissa luontainen valinta kulmiksi voisi olla kaksi pallokoordinaatiston kulmaa sekä kolmas kulma ilmoittamaan raketin pyöriminen oman akselinsa ympäri, kuten kuvassa 1. Tässä menetelmässä on kuitenkin hankaluutena niin sanonut singulaaripisteet. Singularipiste on sellainen asento, missä jokin asentomuuttuja ei ole hyvin määritelty, tai vastaavasti arvon voi valita mielivaltaisesti vaikuttamatta raketin asentoon.

Edellä mainituilla pallokoordinaatiston kulmilla tällainen singulaaripiste on se, kun raketti osoittaa suoraan ylöspäin. Tällöin raketin suuntakulmalla on sama vaikutus kuin pyörityskulmalla raketin ympäri. Raketin heilahtaessa pystysuoran kautta — mitä tapahtuu varsin usein lennon aikana — pitäisi tehdä vaikeaa erikoistarkastelua näiden kulmien suhteen. On matemaattinen mahdottomuus määritellä kolmea sellaista suuntakulmaa, joilla ei singulaaripisteitä muodostuisi.

Kuvassa 2 on kuvattu piste pallopinnalla käyttäen maantieteellistä koordinaattijärjestelmää. Tässä ilmenee kahdella suuntakulmalla sama ongelma: pohjois- ja etelänavalla ei pituuspiirillä ole vaikutusta. Ongelmallisesta erikoistapauksesta päästään kuitenkin eroon lisäämällä joukkoon ylimääräinen muuttuja sekä jokin rajoitusehto. Esimerkiksi pisteen sijainti pallopinnalla voidaan kuvata kolmella karteesisella koordinaatilla *(x, y, z)* kun lisätään rajoitusehto $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lisäämällä ylimääräinen muuttuja ja rajoitusehto on erikoistapauksista päästy eroon, vaikka omat ongelmansa toki syntyy rajoitusehdon säilyttämisestä. Nämä ongelmat ovat kuitenkin matemaattisesti helpompia kuin singulaaripisteiden erikoistarkastelut. Kolmiulotteisten kiertojen tapauksessa kätevän esitystavan tälle tarjoavat yksikkökvaterniot.

Kvaterniot avuksi

Kompleksiluvut ovat useimmille tuttuja jo lukiosta. Kompleksiluku on olennaisesti kaksiulotteinen koodinaatti *(x, y)*, joka usein kirjoitetaan muodossa $x + y\boldsymbol{i}$, lisäsäännöllä $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Yksikköpituisilla kompleksiluvuilla on lisäominaisuus, että kompleksiluvun kertominen niillä vastaa aina jotain geometristä kiertoa origon ympäri. Operaatio säilyttää pisteen etäisyyden origosta ja vain kiertää sitä määrätyn kulman origon ympäri.

Kvaterniot vievät tämän ajattelun pidemmälle, neljään ulottuvuuteen. Kvaternio ilmaistaan muodossa $w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, jossa $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$. Tässä sekä $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ että $\boldsymbol{k}$ ovat imaginaariyksiköitä, mutta silti eri arvoja. Edellä mainitussa muodossa kvaternio voidaan tulkita myös joko neliulotteisena koordinaattina *(w, x, y, z)* tai reaaliluvun *w* ja kolmiulotteisen vektorin $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ summana. Kaikki nämä tulkinnat ovat — hämmästyttävää kyllä — toistensa kanssa yhtäpitäviä.

Kvaternioiden hyödyllinen ominaisuus kolmiulotteisia pyörityksiä tarkastellessa on, että vektorin kertominen kahdelta puolelta yksikkökvaterniolla vastaa aina jotain kolmiulotteista kiertoa!

Jos haluamme kiertää vektoria $\boldsymbol{v}$ yksikkövektorin $\boldsymbol{u}$ ympäri kulman φ, meidän tarvitsee vain määritellä kvaternio

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (1)$$

Tämän jälkeen vektori v voidaan kiertää laskemalla tulo $q\boldsymbol{v}q^{-1}$. Vastaavasti kierto vastakkaiseen suuntaan on $q^{-1}\boldsymbol{v}q$. Kvaternion käänteisluku on lisäksi helppo laskea, sillä yksikkökvaternioille pätee $(w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})^{-1} = w - x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$. Kun kvaternio on kerran laskettu, voi minkä hyvänsä vektorin kiertää yhteensä 24 reaaliluvun kertolaskulla.

Kun tarkastellaan kahta peräkkäistä kvaternioilla tehtävää kiertoa, havaitaan että $s(q\boldsymbol{v}q^{-1})s^{-1} = (sq)\boldsymbol{v}(sq)^{-1}$. Tämä tarkoittaa, että kahta yksikkökvaterniota vastaavien kiertojen yhteisvaikutus saadaan kuvattua yksinkertaisesti näiden kahden kvaternion tulolla. Näin ollen kiertoja on helppo yhdistää toisiinsa.

Näiden ominaisuuksien johdosta kvaterniot sopivat oivallisesti kolmiulotteisten kiertojen kuvaamiseen. Geometrisestä tulkinnasta on helppo laskea vastaava kvaternio, vektorin kiertäminen on suoraviivaista, ja kiertojen yhdistäminen on helppoa.

Kvaternioiden laskutoimituksissa tosin piilee vielä yksi jippo. On todistettu, että kompleksiluvut on suurin lukujoukko, jossa perinteisen algebran laskusäännöt voivat päteä. Kvaternioilla täytyy siis jostain joustaa. Tämä jousto tehdään poistamalla kertolaskun vaihdannaisuus: kvaternioiden imaginaariyksiköille pätee ***ij*** = -***ji***, ***jk*** = -***kj*** ja ***ki*** = -***ik***. Tämä pitää huomioida kvaternioidan laskenta-algoritmeja toteuttaessa.

Lisää kvaternioiden laskennasta voi lukea Wikipediasta [1]. Matemaattisesti suuntautuneille voidaan vielä mainita, että kvaternioesitys vastaa myös SU(2)-ryhmää. Kvaternioiden esitystapa on kuitenkin huomattavasti intuitiivisempi yllä olevien kaavojen ansiosta, minkä vuoksi ne ovat suosittuja 3D-ohjelmoinnissa.

Kvaterniot raketin kyydissä

Yksikkökvaterniot pystyvät siis esittämään mielivaltaisen kolmiulotteisen kappaleen kierron. Sen sijaan, että yritettäisiin suoraan määritellä raketin asento, voidaankin kuvata millainen kierto tuottaa sen hetkisen raketin asennon jostakin ennalta määrätystä asennosta. Näin ollen raketin asento voidaan kuvata kolmiulotteisella kierrolla sekä määritellyllä referenssiasennolla.

Raketeille luontainen referenssiasento on se, jossa raketti osoittaa suoraan ylöspäin (vaikka rakettia ei suoraan ylöspäin laukaistaisikaan). Tällöin esimerkiksi kiertokvaternio (1, 0, 0, 0) vastaisi suoraan ylöspäin osoittavaa rakettia, koska 1:llä kertominen ei muuta vektoria. (0,707; 0,707; 0; 0) puolestaan olisi raketti, joka osoittaa 45º kulmassa y-akselin suuntaan (eli on kierretty 45º x-akselin ympäri, sin 45º = cos 45º ≈ 0,707). Raketin hetkellisen sijainnin lennon aikana voikin yksikäsitteisesti määritellä kolmiulotteisella karteesisella koordinaatilla (sijainti) ja yksikkökvaterniolla (asento).

Raketin tilaan liittyy lisäksi sen nopeus ja pyörimisnopeus. Lineaarinen nopeus kuvataan kolmiulotteisena suuntavektorina, pyörimisnopeus puolestaan kolmiulotteisella pyörimisvektorilla. Koska raketti voi pyöriä mielivaltaista nopeutta minkä hyvänsä kolmen akselinsa ympäri, ei tässä ilmene vastaavia ongelmia singulaaripisteiden kanssa kuin asennolla. Pyörimisvektorin suunta ilmaisee minkä akselin ympäri raketti on hetkellisesti pyörimässä, ja sen pituus ilmaisee pyörimisnopeuden.

Ympäröivät tekijät kuten aerodynaamiset voimat sekä moottorin työntövoima tuottavat rakettiin kiihtyvyyksiä. Lineaarinen kiihtyvyys ilmaistaan jälleen suuntavektorina, pyörimiskiihtyvyys puolestaan kulmakiihtyvyysvektorina.

Kun kiihtyvyys tai nopeus kerrotaan aika-askeleella, saadaan nopeuden ja paikan muutoksen määrä aika-askeleen aikana. Lineaariset vektorit ja pyörimisvektorit pystytään laskemaan suoraan yhteen, jolloin saadaan raketin tila aika-askeleen jälkeen. Ainoa, missä tarvitsee tehdä mutkikkaampia laskuja on pyörimisvektorin vaikutus asentokvaternioon. Aika-askeleen aikana tapahtuvaa pyörimistä kuvaavaa vektoria vastaava kvaternio saadaan yhtälöllä (1). Vektorin pituus määrittää pyörimiskulman φ, ja suunta pyörimisakselin ***u***. Koska kaksi kvaternioilla kuvattua pyöritystä voidaan yhdistää toisiinsa kertomalla ne keskenään, saadaan raketin uusi asento yksinkertaisesti kertomalla nykyinen asento aika-askeleen muutoskvaterniolla vasemmalta puolelta.

Tällä tavoin pystytään jokaisella aika-askeleella päivittämään raketin tilaa eteenpäin, ja tätä toistamalla simuloimaan koko raketin lento. Näistä differentiaaliyhtälöiden numeerisista ratkaisutavoista kerron lisää artikkelisarjan seuraavassa osassa.

Artikkelisarjan aiemmissa osissa kerroin OpenRocket-ohjelmiston kehitysvaiheista ja raketin aerodynaamisten ominaisuuksien laskennasta. Myöhemmissä osissa on luvassa tietoa numeerisista menetelmistä, moniulotteisesta optimoinnista, ohjelmiston käytöstä Haisunäätä-projekteissa sekä tulevaisuuden suunnitelmista.

OpenRocket-ohjelmiston sekä diplomityön saa ladattua osoitteesta http://openrocket.sourceforge.net/ Artikkelisarjan aiemmat osat on luettavissa SATS:n sivuilta osoitteesta http://www.sats-saff.fi/

Viitteet:

[1] Quaternion, verkkodokumentti, 21.4.2012. *http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion* □

IAF:n nuorille suunnatut apurahat ja ohjelmat haussa!

2013 Emerging Space Leaders Grant Programme

Ohjelmaan valitut osallistuvat IAC-kongressiin Pekingissä, Kiinassa 23.-27.9.2013, sekä muihin workshopeihin edellisviikolla. Ohjelmaan valituille maksetaan matkat ja majoitus Pekingiin.

Ohjelmaan voi hakea 21-35 -vuotiaat opiskelijat ja avaruusaiheisesta urasta kiinnostuneet luomalla lyhyen esittelyvideon itsestään ja lähettämällä hakemuksen 1. helmikuuta mennessä.

The Next Generation Plenary

IAC-kongressissa järjestettävään tulevaisuuden miehitettyjä avaruuslentoja käsittelevään paneelikeskusteluun etsitään nuoria, 21-35 -vuotiaita visionäärejä. Valitut osallistujat pääsevät esittelemään näkemyksiään paneelikeskustelussa arvovaltaisen yleisön edessä.

Rahoitus IAC:hen matkustamiseksi tulee hakea muuta kautta (esim. Grant-ohjelma). Haku ohjelmaan tapahtuu lyhyellä videolla ja hakemuksella 6. tammikuuta mennessä.

Lisätietoja ja ilmoittautumisohjeet osoitteessa *http://www.iafastro.org/* □